DETRA NOTE
2018-1

# BACK TO THE FUTURE
## *L'association tontinière*

Par Michel Denuit et Julien Trufin

## Disclaimer

Le contenu des Detra Notes est à usage exclusivement pédagogique. Les applications commerciales sont à ce point spécifiques qu'on ne pourrait leur appliquer une solution qui n'aurait pas été conçue pour le cas d'espèce. Detralytics n'assume donc aucune responsabilité en cas d'utilisation commerciale du contenu du présent document. Bien évidemment, toute l'équipe se tient à votre entière disposition si les techniques présentées dans cette note devaient retenir votre intérêt.

**Résumé**

Les évolutions rapides de la mortalité constatées dans les pays industrialisés depuis 1950, les incertitudes entourant les tendances futures conjuguées à la faiblesse persistante des taux d'intérêt rendent désormais très difficile, si pas impossible, la commercialisation des rentes viagères classiques. Ceci a amené plusieurs auteurs à reconsidérer cette couverture d'assurance pour lui préférer sa forme mutualiste ancestrale, vidée des multiples garanties qui ont été progressivement greffées sur le produit au fil du temps. Cette forme épurée du partage du risque individuel de longévité semble particulièrement attrayante à l'heure où les assureurs ont pris conscience de l'ampleur des risques de dérive à long terme de la mortalité et de la difficulté de les gérer. Cette approche permettrait également de résoudre les problèmes posés par le fait que les valeurs de rachat ne dépendent pas de l'état de santé de l'assuré, ce qui a entraîné la création d'un marché secondaire des life settlements.

*Dans les deux notes intitulées "Back to the Future", les auteurs démontrent comment un retour aux fondamentaux de l'assurance (à savoir le partage des risques dans sa forme la plus basique) revisités à la lumière des techniques actuarielles les plus récentes permettrait de répondre à bon nombre de défis actuels du secteur.*

# Table des matières

# Chapitre 1

# Gestion du risque individuel de longévité

Quand on parle de longévité exceptionnelle, le nom de Jeanne Calment vient naturellement à l'esprit. En 1965, à l'âge de 90 ans et sans héritier, celle qui deviendra la doyenne de l'humanité vend son appartement en viager à son notaire, André-François Raffray. Ce dernier, alors âgé de 47 ans, accepte de lui payer mensuellement la somme de 2 500 francs. Il le fera jusqu'à sa mort en 1995, à l'âge de 77 ans ; sa veuve continuera ensuite à s'acquitter du paiement de la rente, jusqu'à la mort de Jeanne Calment. Au total, les époux Raffray ont versé plus de deux fois le prix de l'appartement de Jeanne Calment conformément aux règles du viager ! [1]

À l'inverse, les époux De Gaulle acquièrent en 1934 le domaine de la Boisserie à Colombey-les-Deux-Églises, à la propriétaire des lieux, Alice Bombal, veuve d'un architecte parisien. Le prix de vente est converti en une rente viagère (en plus d'un canon). Mais l'infortunée Alice Bombal décède accidentellement peu après la vente, mettant ainsi fin au versement des arrérages par les De Gaulle. Et ce n'est pas la seule famille présidentielle à réaliser de telles opérations. Anne-Aymone de Brantes, mariée à Valéry Giscard d'Estaing, acquiert en 1960 auprès d'une cousine éloignée le domaine de l'Étoile, s'étendant sur plusieurs centaines d'hectares à Authon dans le Loir-et-Cher. Le versement de la rente s'achève seulement quatre ans après la signature, avec la mort de la cousine.

Ces cas d'espèce illustrent bien le non-sens d'un raisonnement en moyenne en pareilles circonstances. Pour être légitime, un tel raisonnement doit s'appuyer sur la loi des grands nombres, donc la compensation des écarts sur un grand nombre d'opérations du même type. Une vente en viager est une opération par essence unique de sorte que tabler sur la durée moyenne de versement n'a aucun sens pour les parties en présence (1 n'étant pas vraiment ce qu'on peut appeler un grand nombre...). En pratique cependant, certains n'hésitent pas à travailler en moyenne alors qu'ils sont confrontés à une seule opération. Nous renvoyons le lecteur aux commentaires de Ledoux et Denuit (2013) ainsi qu'au Chapitre 11 de l'ouvrage de Delwarde et Denuit (2005) ; notez que ceci n'enlève rien à la pertinence des tables publiées par les autorités publiques afin de déterminer le montant des droits de succession

1. À l'heure actuelle, la plupart des ventes en viager en Belgique prévoient des durées limitées de versement des rentes, tout en permettant au crédirentier de demeurer dans le bien vendu. À ces conditions, la vente en viager ne procure plus au vendeur un complément de retraite illimité dans le temps (même s'il peut continuer à occuper le bien jusqu'à son décès).

ou d'enregistrement en cas d'usufruit, l'État pouvant bien entendu raisonner en moyenne sur l'ensemble des opérations réalisées par ses citoyens. L'imprévisibilité de la durée de vie d'un individu explique d'ailleurs le lancement des fonds viagers (sous la forme d'un FPCI en France, d'une SICAV au Luxembourg, d'une société civile d'investissement en Belgique) permettant aux investisseurs de mutualiser les risques de survie des crédirentiers, donc de compenser la perte réalisée sur l'opération conclue en faveur de Jeanne Calment par les gains des deux autres.

Bien entendu, tout le monde ne possède pas de patrimoine immobilier susceptible d'être vendu en viager. L'outil idéal de gestion du risque individuel de longévité, c'est-à-dire du risque d'être toujours en vie une fois les actifs disponibles consommés, est sans nul doute la rente viagère immédiate ou différée. Contre paiement d'une prime unique ou à l'issue d'une phase de constitution de celle-ci, un assureur s'engage alors à verser une somme constante, à échéances fixées, jusqu'au décès de l'assuré. Malheureusement, ce produit s'est avéré beaucoup plus redoutable qu'il n'y paraissait, en raison des progrès rapides et mal anticipés des espérances de vie conjugés à la chute des taux d'intérêt.

Le risque est d'ailleurs sans doute bien plus prononcé que suggéré par le capital calculé dans le cadre de Solvency 2, obtenu en choquant à la baisse les quotients de mortalité de 25%. En effet, les tables de mortalité utilisées par les actuaires sont typiquement obtenues en extrapolant les tendances passées [2] alors que de nombreuses voix s'élèvent pour prédire des espérances de vie à la naissance dépassant allègrement le siècle, voire quasiment l'immortalité. Les actuaires auraient-ils une nouvelle fois conduit leur portefeuille en regardant dans le rétroviseur plutôt que devant eux [3] ?

La réassurance n'est que peu intéressante dans ce cas, puisque les progrès de la longévité sont constatés dans tous les pays industrialisés. Des investisseurs semblent prêts à assumer une part de ce risque, par le biais de traités de réassurance ou d'actifs financiers dont le rendement est lié aux progrès de la longévité, voire de swap de flux financiers liés à des portefeuilles de rentes. Mais en l'absence de stratégie de couverture opérationnelle, ces transactions relèvent largement de la spéculation. Elles nécessitent donc la mise en place de structures dédiées afin de limiter le risque de contrepartie, d'où leur coût élevé.

Sentant venir la fin de la rente, en tout cas dans sa version classique, de nombreux auteurs ont proposé certains aménagements de ce produit afin qu'elle subsiste au moins dans une forme modifiée. Nous renvoyons le lecteur par exemple aux travaux de Denuit, Haberman et Renshaw (2011, 2015), où différents éléments de la rente, comme le versement périodique ou le terme différé, sont indexés sur les progrès de longévité constatés en cours de contrat, avec des limites à la hausse et à la baisse.

D'autres travaux ont étudié les formules de rente sans la moindre garantie, où les risques financiers et de longévité demeuraient chez les participants. C'est par exemple le cas de la Group Self-Annuitization (GSA) étudiée par Piggott et al. (2005) et par Valdez et al. (2006). Ce type de produits existe depuis fort longtemps, notamment aux Etats-Unis où ils sont utilisés par la Teachers' Insurance and Annuity Association (TIAA), à la plus grande

2. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Pitacco et al. (2009) pour une introduction très abordable à ce sujet.

3. Pour paraphraser la célèbre plaisanterie à propos des actuaires : How to spot an actuary driving a car ? Answer : They drive without taking their eyes off the rear-view mirror. Voyez par exemple https ://actuarial-jokes.com/ pour conclure que la profession ne manque pas de sens de l'humour...

satisfaction des participants.

La combinaison d'une rente avec une couverture dépendance a été proposée (pour former une Life Care Annuity), notamment par Brown et Warshawsky (2013). A priori attractive, puisqu'un individu risqué sur un volet le sera sans doute moins sur l'autre, cette formule n'en est cependant qu'à ses balbutiements et certaines études suggèrent que la diversification souhaitée n'est peut-être pas au rendez-vous.

Bien d'autres formules existent pour financer ses vieux jours, comme le prêt hypothécaire inversé (ou equity release) par exemple. Il n'entre pas dans nos intentions de les étudier exhaustivement, mais plutôt de présenter un mécanisme particulier inspiré de la célèbre tontine qui permit aux rois d'Angleterre de financer leurs guerres incessantes contre la France (comme l'explique Milevsky, 2015). Au-delà du financement d'un complément de retraite par ces rentes d'un nouveau type, nous verrons qu'un tel mécanisme permet également de réaliser des actifs non liquides, comme les polices d'assurance en cas de décès détenues par des individus à l'état de santé dégradé. Cela fournit donc une alternative aux marché secondaire des fonds de life settlements dont les coûts de transaction sont souvent prohibitifs. Mieux encore, une telle alternative pourrait être mise en place au sein même du secteur de l'assurance, qui offrirait ainsi un service supplémentaire.

# Chapitre 2

# La clause d'accroissement et l'association tontinière

On connaît la difficulté de trouver une couverture décès à un prix abordable lorsqu'on avance en âge. Une telle garantie devient même généralement impayable une fois arrivé à l'âge de la retraite. La solution au financement des besoins des aînés est donc toute trouvée : il suffit qu'ils se muent en assureur, en acceptant de verser un capital au cas où leur propre décès surviendrait, empochant ainsi une rémunération élevée (tout comme le serait la prime que réclamerait un assureur pour la même opération). Cette approche peut se voir comme une forme de résurgence du mécanisme tontinier, lequel revient d'ailleurs fréquemment dans la littérature lorsqu'il s'agit du financement de la fin de vie (voyez par exemple Brautigam et al., 2017, Forman et Sabin, 2017, Milevsky et Salisbury, 2015, Sabin et Forman, 2016). Nous décrivons ici le mécanisme simple et performant étudié dans l'excellente contribution de Donnelly et Young (2017), dans sa version la plus élémentaire, de nombreuses variantes ayant été développées par les auteurs.

Considérons un individu d'âge relativement avancé (en tout cas, au-delà de l'âge de départ à la retraite) désirant tirer un revenu complémentaire d'un actif qu'il est prêt à perdre en cas de décès (il a donc éventuellement pris par ailleurs des dispositions en faveur de ses proches). Pour simplifier, nous considèrerons qu'il s'agit d'une somme d'argent, le mécanisme se généralisant à d'autres actifs financiers ou immobiliers.

Il rejoint un groupe de $n$ individus qui poursuivent le même but, chacun d'entre eux immobilisant une somme $s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, bloquée sur un compte en banque commun. Les taux d'intérêt étant à ce point bas pour l'instant, nous négligeons l'actualisation des flux financiers dans ce qui suit, afin de simplifier l'exposé.

Chaque participant accepte de risquer son capital $s_i$ en cas de décès dans l'année qui vient. Précisément, chacun d'entre eux perdra son capital en cas de décès, en échange de quoi il percevra une rémunération proportionnée à sa prise de risque. Notez ici l'analogie avec l'assurance décès : chaque participant joue le rôle de l'assureur, en acceptant de verser le capital $s_i$ en faveur des autres participants au cas où il décèderait, et il touche pour cela une rémunération, tout comme l'assureur empocherait une prime. L'âge étant relativement avancé, la rémunération sera donc conséquente.

Afin de formaliser cette opération, introduisons l'indicatrice de survie

$$I_i = \begin{cases} 1 \text{ si le participant } i \text{ survit,} \\ \\ 0 \text{ si le participant } i \text{ décède.} \end{cases}$$

Les participants s'accordent sur une probabilité de décès

$$q_i = \mathrm{P}[I_i = 0]$$

qui servira seulement à déterminer les rémunérations des uns et des autres. Le risque pris par l'individu $i$ dépend de la somme $s_i$ qu'il est susceptible de perdre et de sa probabilité de décès $q_i$. La prime pure que réclamerait un assureur couvrant le décès s'élèverait à $s_i q_i$. La proposition de Donnelly et Young (2017) consiste à utiliser les $s_i q_i$ comme clef de répartition des gains, c'est-à-dire pour répartir les capitaux

$$\sum_{j=1}^{n}(1 - I_j)s_j$$

perdus par les prémourants. Précisément, le gain $G_i$ de l'opération pour l'individu $i$ vaut alors

$$G_i = \frac{s_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j q_j} \sum_{j=1}^{n}(1 - I_j)s_j - s_i(1 - I_i)$$

ou encore,

$$G_i = \begin{cases} \frac{s_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j q_j} \sum_{j=1}^{n}(1 - I_j)s_j \text{ si le participant } i \text{ survit} \\ \\ \frac{s_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j q_j} \sum_{j=1}^{n}(1 - I_j)s_j - s_i \text{ si le participant } i \text{ décède.} \end{cases}$$

Notez que, contrairement à d'autres mécanismes proposés dans la littérature, cette manière de procéder

- fonctionne quel que soit le nombre $n$ de participants, même si l'intuition de l'actuaire lui suggère qu'au plus $n$ est grand, au plus stables seront les flux financiers.
- est équilibrée puisque

  $$\mathrm{E}[G_i] = \frac{s_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j q_j} \sum_{j=1}^{n} q_j s_j - s_i q_i = 0.$$

  Il n'y a donc aucune donation entre participants, chacun d'entre eux tirant de l'opération un revenu proportionné au risque qu'il prend (cette considération étant importante en matière de taxation et pour éviter toute contestation ultérieure de l'opération par des ayants-droit qui s'estimeraient lésés).
- les probabilités de décès $q_i$ ne jouent ici qu'un seul rôle, celui de partager les mises entre les participants. Il s'agit d'un partage de risque au sein du groupe, la somme des gains des participants étant toujours nulle :

  $$\sum_{i=1}^{n} G_i = 0.$$

  Il n'y a aucun transfert de risque vers un autre agent économique.

Les calculs sont également bien plus aisés que si la répartition n'est prévue qu'en faveur des survivants ; voyez à ce sujet les développements dans Denuit et Vernic (2018).

Notez que l'hétérogénéité du groupe est ici permise, aussi bien en termes de mortalité que de mises respectives. Le revenu tiré de l'opération dépend cependant des profils de risque des autres participants, plus précisément de leurs mises $s_i$ et de leurs probabilités de décès $q_i$. De plus, l'opération est ici annuelle, chaque survivant étant libre de conclure une nouvelle opération du même type pour la période qui suit. Rien n'empêche bien entendu de concevoir des opérations à plus long terme, prévoyant des répartitions périodiques des sommes des participants prémourants en faveur des survivants. Le gain par période est alors nul en moyenne pour tous les participants.

# Chapitre 3

# Illustrations numériques

## 3.1 Hypothèses de calcul

Nous supposons pour simplifier que $s_i = s$ pour tout $i$, donc l'homogénéité en termes de capital. Ce choix n'est d'ailleurs pas anodin dans la mesure où l'analyse conduite par Denuit et Frostig (2006) indique que le risque augmente lorsque les mises initiales diffèrent entre les participants dont le risque de mortalité est identique. De plus, imposer une certaine homogénéité dans les mises garantit que les profils socio-économiques des participants sont semblables (la somme assurée étant une variable influençant fortement le risque de mortalité en assurance). Posons de plus $s =$100 000, sans perte de généralité. La somme à répartir est alors égale à $sD$, où $D$ désigne le nombre de décès

$$D = \sum_{j=1}^{n} (1 - I_j)$$

recensés parmi les $n$ participants. L'individu $i$ recevra la part relative

$$\frac{q_i}{q_\bullet} \text{ avec } q_\bullet = \sum_{j=1}^{n} q_j$$

du montant $sD$ à répartir. Ce versement lui est acquis en toute hypothèse, qu'il survive ou pas (dans ce dernier cas, la succession recueillera la part qui lui revient).

On peut montrer qu'au plus les $q_j$ sont différents, en conservant $q_\bullet$, au moins $D$ est variable. Ainsi, la loi Binomiale obtenue lorsque $q_i = q$ pour tout $i$ (c'est-à-dire lorsque les participants sont tous soumis au même risque de mortalité) est la plus risquée au sens où elle maximise les primes stop-loss ou les Tail-VaR parmi toutes les sommes de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli (en conservant la moyenne). C'est un des rares cas où l'hétérogénéité réduit le risque. Ce résultat peut se trouver (dans une formulation simplifiée) déjà dans le Tome 1 de Feller (1950, page 231), qui mentionne également les travaux antérieurs de Höffding. Nous présentons ici l'extension de Denuit et Frostig (2006) afin d'analyser le besoin de capital dans le modèle individuel de théorie du risque. Précisément, ayant deux jeux de quotients de mortalité $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, \ldots, \widetilde{q}_n$ rangés par ordre croissant,

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{q}_i \\ \sum_{i=1}^{k} q_i \geq \sum_{i=1}^{k} \widetilde{q}_i\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{TVaR}[D;\pi] \leq \mathrm{TVaR}[\widetilde{D};\pi]$$

pour tout niveau de probabilité $\pi$. La même inégalité est valable pour les variances et les primes stop-loss, par exemple.

## 3.2 Homogénéité de la mortalité

Plaçons-nous d'abord dans le cas le plus variable et considérons donc le cas homogène où $q_i = q$ pour tout $i$, en étudiant l'impact du nombre $n$ de participants et de la valeur croissante de $q$. Nous commençons avec $q = 0.01$, un tel quotient de mortalité correspondant à l'âge de 65 ans pour la table de mortalité XR définie par le régulateur belge. Ensuite, nous augmentons $q$ à 0.02, 0.05 et 0.1. Dans ces cas, nous avons

$$D \sim \mathcal{B}in(n,q).$$

Intéressons-nous à la loi de probabilité du gain $G_i$ pour un survivant (on travaille donc conditionnellement à $I_i = 1$). Dans le cas homogène, la variable d'intérêt est donc

$$\frac{1}{n}D \text{ sachant } I_i = 1.$$

Ceci revient à travailler avec la loi $\mathcal{B}in(n-1,q)$. Nous considérons $n = 10$, 100 et 1000 pour illustrer le bénéfice de diversification tiré de l'augmentation du nombre de participants. Pour un survivant (donc sachant $I_i = 1$), nous avons en moyenne

$$\mathrm{E}[G_i|I_i = 1] = s\frac{(n-1)q}{n}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on constate que le gain moyen tend vers la prime pure $sq$ que réclamerait l'assureur (nonobstant les chargements de sécurité sur la table de mortalité). Le quantile d'ordre $\pi$, ou VaR, du gain conditionnel est quant à lui donné par

$$\mathrm{VaR}_\pi[G_i|I_i = 1] = \frac{s}{n}\min\left\{k = 0,1,\ldots \,\middle|\, \sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{j}q^j(1-q)^{n-1-j} \geq \pi\right\}.$$

Le Tableau 3.1 décrit les principales caractéristiques de la loi du gain pour un survivant (on travaille donc conditionnellement à $I_i = 1$) : moyennes, quartiles et quantiles à 5% et 95%. On voit clairement que lorsque $n$ et/ou $q$ augmentent, le gain a tendance à se stabiliser, rendant l'opération plus attractive.

| | $q = 0.01$ | | | $q = 0.02$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 10 | 100 | 1 000 | 10 | 100 | 1 000 |
| $\mathrm{E}[G_i\|I_i = 1]$ | 900 | 990 | 999 | 1800 | 1980 | 1998 |
| $\mathrm{VaR}_{0.05}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 0 | 500 | 0 | 0 | 1300 |
| $\mathrm{VaR}_{0.25}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 0 | 800 | 0 | 1000 | 1700 |
| $\mathrm{VaR}_{0.5}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 1000 | 1000 | 0 | 2000 | 2000 |
| $\mathrm{VaR}_{0.75}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 2000 | 1200 | 0 | 3000 | 2300 |
| $\mathrm{VaR}_{0.95}[G_i\|I_i = 1]$ | 10000 | 3000 | 1500 | 10000 | 5000 | 2800 |
| | $q = 0.05$ | | | $q = 0.1$ | | |
| $n$ | 10 | 100 | 1 000 | 10 | 100 | 1 000 |
| $\mathrm{E}[G_i\|I_i = 1]$ | 4500 | 4950 | 4995 | 9000 | 9900 | 9990 |
| $\mathrm{VaR}_{0.05}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 2000 | 3900 | 0 | 5000 | 8500 |
| $\mathrm{VaR}_{0.25}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 3000 | 4500 | 0 | 8000 | 9400 |
| $\mathrm{VaR}_{0.5}[G_i\|I_i = 1]$ | 0 | 5000 | 5000 | 10000 | 10000 | 10000 |
| $\mathrm{VaR}_{0.75}[G_i\|I_i = 1]$ | 10000 | 6000 | 5500 | 20000 | 12000 | 10600 |
| $\mathrm{VaR}_{0.95}[G_i\|I_i = 1]$ | 20000 | 9000 | 6200 | 30000 | 15000 | 11600 |

TABLE 3.1 – Moyennes et quantiles de $G_i$ sachant $I_i = 1$ pour différentes valeurs de $n$ et de $q$ dans le cas homogène.

## 3.3 Hétérogénéité de la mortalité

Passons à présent au cas hétérogène. Pour ce faire, nous mélangeons deux groupes, en considérant $n$ pair. Les quotients de mortalité s'appliquant aux individus sont les suivants :

$$q_i = \begin{cases} \frac{q}{2} \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} \\ \\ \frac{3q}{2} \text{ pour } i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Ce choix garantit que la somme des $q_i$ est bien conservée par rapport au cas homogène puisque

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{q}{2} \times \frac{n}{2} + \frac{3q}{2} \times \frac{n}{2} = nq.$$

À présent

$$D \sim \mathcal{B}in\left(\frac{n}{2}, \frac{q}{2}\right) \star \mathcal{B}in\left(\frac{n}{2}, \frac{3q}{2}\right)$$

où $\star$ désigne le produit de convolution (correspondant aux sommes de variables aléatoires indépendantes).

Le Tableau 3.2 décrit les principales caractéristiques de la loi du gain pour un survivant (on travaille donc conditionnellement à $I_i = 1$) en fonction du groupe auquel il appartient. Dans le cas où deux groupes sont présents, on travaille pour $D$ avec la loi

$$\mathcal{B}in\left(\frac{n}{2} - 1, \frac{q}{2}\right) \star \mathcal{B}in\left(\frac{n}{2}, \frac{3q}{2}\right)$$

| | $q=0.01$ | | | | $q=0.1$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n=100$ | | $n=1000$ | | $n=100$ | | $n=1000$ | |
| Groupe | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $\mathrm{E}[G_i\|I_i=1]$ | 498 | 1478 | 500 | 1498 | 4975 | 14775 | 4997 | 14978 |
| $\mathrm{VaR}_{0.05}[G_i\|I_i=1]$ | 0 | 0 | 250 | 750 | 2500 | 7500 | 4250 | 12750 |
| $\mathrm{VaR}_{0.25}[G_i\|I_i=1]$ | 0 | 0 | 400 | 1200 | 4000 | 12000 | 4700 | 13950 |
| $\mathrm{VaR}_{0.5}[G_i\|I_i=1]$ | 500 | 1500 | 500 | 1500 | 5000 | 15000 | 5000 | 15000 |
| $\mathrm{VaR}_{0.75}[G_i\|I_i=1]$ | 1000 | 3000 | 600 | 1800 | 6000 | 18000 | 5300 | 15900 |
| $\mathrm{VaR}_{0.95}[G_i\|I_i=1]$ | 1500 | 4500 | 750 | 2250 | 7500 | 22500 | 5800 | 17250 |

TABLE 3.2 – Moyennes et quantiles de $G_i$ sachant $I_i=1$ pour différentes valeurs de $n$ et de $q$ dans le cas hétérogène (deux groupes de taille $n/2$ et de probabilités de décès respectivement égales à $q/2$ et $3q/2$).

si l'individu appartient au premier groupe, et

$$\mathscr{B}in\left(\frac{n}{2},\frac{q}{2}\right)\star\mathscr{B}in\left(\frac{n}{2}-1,\frac{3q}{2}\right)$$

si l'individu appartient au second. Notez que lorsqu'il y a suffisamment de participants, la loi du nombre de décès recensés parmi $n/2$ ou $n/2-1$ individus est très semblable, de sorte que l'effet qui domine est le changement dans le coefficient $\frac{q_i}{q_\bullet}$, valant $\frac{1}{2n}$ si l'individu appartient au premier groupe ou $\frac{3}{2n}$ s'il appartient au second.

À la lecture des résultats donnés au Tableau 3.2, on constate à nouveau qu'une augmentation de $n$ est bénéfique. Les gains moyens par survivant sont de l'ordre du triple dans le deuxième groupe (dont les quotients de mortalité sont triplés par rapport à ceux du premier), de même que les quantiles.

## 3.4 Hétérogénéité des mises

Passons à présent au cas où il y a plusieurs valeurs des $s_i$. Comme on peut le constater en lisant les résultats de Denuit et Frostig (2016), l'impact sur la variabilité de la somme à répartir est moins clair en général. Restreignons-nous au cas où le même quotient de mortalité $q$ s'applique à tous les participants. Les résultats numériques correspondants sont repris à la Table 3.3 où nous avons considéré deux mises initiales différentes, à savoir

$$s_i=\begin{cases}50000 \text{ pour } i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}\\[2ex] 150000 \text{ pour } i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\ldots,n.\end{cases}$$

Le Tableau 3.3 décrit les principales caractéristiques de la loi du gain pour un survivant (on travaille donc toujours conditionnellement à $I_i=1$) en fonction de sa mise initiale (50 000 ou 150 000). Les moyennes s'obtiennent aisément. Par exemple, pour un individu $i$

| | $q=0.01$ | | $q=0.1$ | |
|---|---|---|---|---|
| Groupe | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $\mathrm{E}[G_i \mid I_i=1]$ | 499.75 | 1497.75 | 4997.5 | 14977.5 |
| $\mathrm{VaR}_{0.05}[G_i \mid I_i=1]$ | 225 | 675 | 4150 | 12375 |
| $\mathrm{VaR}_{0.25}[G_i \mid I_i=1]$ | 375 | 1125 | 4625 | 13875 |
| $\mathrm{VaR}_{0.5}[G_i \mid I_i=1]$ | 500 | 1500 | 5000 | 14925 |
| $\mathrm{VaR}_{0.75}[G_i \mid I_i=1]$ | 600 | 1800 | 5350 | 16050 |
| $\mathrm{VaR}_{0.95}[G_i \mid I_i=1]$ | 800 | 2400 | 5875 | 17625 |

TABLE 3.3 – Moyennes et quantiles de $G_i$ sachant $I_i = 1$ pour $n$ =1 000 et différentes valeurs de $q$ dans le cas hétérogène (deux groupes de taille $n/2$ et de mises initiales respectivement égales à 50 000 pour le groupe 1 et 150 000 pour le groupe 2).

appartenant au premier groupe et $q = 0.01$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[G_i \mid I_i = 1] &= \frac{s_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j q_j} \sum_{j \neq i} q_j s_j \\
&= \frac{50000 \times 0.01}{0.01 \times (500 \times 50000 + 500 \times 150000)} \times 0.01 \times (499 \times 50000 + 500 \times 150000) \\
&= 499.75
\end{aligned}$$

soit la valeur figurant dans le tableau. Le calcul des quantiles nécessite quant à lui la loi de probabilité du montant à répartir entre les participants, laquelle s'obtient grâce au produit de convolution

$$\left(50000 \times \mathscr{B}in\left(\frac{n}{2} - 1, q\right)\right) \star \left(150000 \times \mathscr{B}in\left(\frac{n}{2}, q\right)\right)$$

si l'individu appartient au premier groupe, et

$$\left(50000 \times \mathscr{B}in\left(\frac{n}{2}, q\right)\right) \star \left(150000 \times \mathscr{B}in\left(\frac{n}{2} - 1, q\right)\right)$$

si l'individu appartient au second. Notez que comme précédemment, la loi du nombre de décès recensés parmi $n/2$ ou $n/2-1$ individus est très semblable lorsque $n$ est suffisamment grand (ce qui est le cas dans l'exemple du Tableau 3.3), de sorte que l'effet qui domine est le changement dans la mise initiale.

À la lecture des résultats donnés au Tableau 3.3, on constate qu'une hétérogénéité des mises initiales induit une augmentation de la dispersion des gains par rapport au cas homogène. Les gains moyens par survivant sont de l'ordre du triple dans le deuxième groupe (dont la mise initiale est triplée par rapport au premier groupe), de même que les quantiles traduisant le rapport entre les mises respectives des deux groupes.

# Chapitre 4

# En guise de conclusion

## 4.1 De tels produits existent-ils ?

Certaines mutuelles d'assurance proposent des produits de ce type en France, comme Les Associations Mutuelles Le Conservateur, société à forme tontinière [1]. La tontine y est proposée comme une association collective d'épargne viagère réunissant des épargnants qui décident d'investir des fonds en commun avec un horizon de placement déterminé, entre 10 et 25 ans. Au terme de l'association, l'actif est réparti entre les survivants en fonction de l'âge à l'adhésion, du montant, de la date du versement et de la durée de placement.

Pour protéger leurs proches, il est souvent proposé aux adhérents à une association collective d'épargne viagère de souscrire des couvertures d'assurance connexes. C'est le cas pour Le Conservateur, où les participants peuvent souscrire des couvertures décès et perte d'autonomie. En cas de décès en cours d'adhésion, cette assurance facultative garantit au minimum le versement aux bénéficiaires désignés de l'équivalent de la somme versée lors de l'adhésion à la tontine (contre-assurance des "primes", donc).

Notez que le règlement adopté par Le Conservateur stipule qu'afin que l'association collective d'épargne viagère soit définitivement constituée, il est nécessaire de réunir 200 sociétaires. À la lumière des résultats de l'analyse numérique menée au Chapitre 3, il est effectivement utile de prévoir un nombre minimum de participants (et 200 semble raisonnable compte tenu de l'horizon de 10 à 25 ans prévu en l'espèce).

## 4.2 Alternative aux life settlements

Des produits d'assurance prévoyant le versement d'un capital au décès, quel que soit l'âge auquel celui-ci survient (couverture dite "vie entière"), sont couramment vendus dans les pays anglo-saxons. De tels produits acquièrent donc une valeur élevée lorsque les assurés sont proches de leur décès, en raison d'un mauvais état de santé par exemple. Nombreux sont ceux qui souhaiteraient alors réaliser cet actif afin de financer leur fin de vie. La valeur

1. Pour plus d'informations, voyez https ://www.conservateur.fr/.

de rachat proposée par l'assureur ne dépendant pas de l'état de santé de l'assuré, elle est donc perçue comme étant trop faible par ceux qui n'en ont plus pour très longtemps à vivre. Ils peuvent alors se tourner vers des investisseurs qui deviendront les bénéficiaires du capital décès, moyennant le versement des primes futures et celui d'un montant supérieur à la valeur de rachat offerte par l'assureur.

Plutôt que de céder leur police décès à de tels investisseurs en consentant un rabais important, les assurés en quête de liquidité pourraient apporter leur contrat dans un fonds viatique, en tout ou en partie : au décès, une partie des prestations reviendrait ainsi aux autres participants. Un tel fonds pourrait d'ailleurs facilement être mis en place par l'ensemble des assureurs. Ceci permettrait de générer des revenus réguliers permettant de faire face aux dépenses parfois importantes liées à des traitements médicaux par exemple.

## 4.3 Intérêt pour le secteur

À l'heure où les assureurs sont de plus en plus frileux à l'idée d'offrir des garanties à long terme [2], la formule décrite dans cette note devrait plus que jamais retenir leur attention. Revenir à la mutualisation des risques au sein d'un groupe, c'est revenir aux fondamentaux de l'assurance, en laissant l'assureur organiser l'opération et démontrer sa plus-value en termes de gestion de la mutualité et de placement des actifs (tout comme pour les produits adossés à des fonds d'investissement).

Gageons donc qu'avec l'essor de l'économie collaborative, de telles opérations sont promises à un bel avenir. Et espérons surtout que les assureurs sauront en tirer parti dans la mesure où on pourrait fort bien imaginer que les participants se passent purement et simplement de leur intervention en sécurisant la transaction (en libérant automatiquement la mise en cas de décès d'un des participants).

2. Et on ne peut que les en féliciter puisque chaque déconfiture d'un assureur ayant formulé des promesses intenables nuit fortement à l'image de l'ensemble du secteur.

# Chapitre 5

# Références


- Brautigam, M., Guillen, M., Nielsen, J. P. (2017). Facing up to longevity with old actuarial methods : A comparison of pooled funds and income tontines. The Geneva Papers on Risk and Insurance – Issues and Practice 42, 406-422.
- Brown, J., Warshawsky, M. (2013). The life care annuity : A new empirical examination of an insurance innovation that addresses problems in the markets for life annuities and long-term care insurance. Journal of Risk and Insurance 80, 677-704.
- Delwarde, A., Denuit, M. (2005). Construction de Tables de Mortalité Périodiques et Prospectives. Collection Audit-Actuariat-Assurance, Economica, Paris.
- Denuit, M., Frostig, E. (2006). Heterogeneity and the need for economic capital in the individual model. Scandinavian Actuarial Journal, 42-66.
- Denuit, M., Haberman, S., Renshaw, A. (2011). Longevity-indexed life annuities. North American Actuarial Journal 15, 97-111.
- Denuit, M., Haberman, S., Renshaw, A. (2015). Longevity-contingent deferred life annuities. Journal of Pension Economics and Finance 14, 315-327.
- Denuit, M., Vernic, R. (2018). Bivariate Bernoulli weighted sums and distribution of single-period tontine benefits. Methodology ad Computing in Applied Probability, sous presse.
- Donnelly, C., Young, J. (2017). Product options for enhanced retirement income. British Actuarial Journal 22, 636-656.
- Feller, W. (1950). An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Volumes 1 & 2). Wiley, New York.
- Forman, J. B., Sabin, M. J. (2017). Survivor funds. Pace Law Review 37, 204-291.
- Ledoux, J.-L., Denuit, M. (2014). Le juriste et le mathématicien. Revue du Notariat Belge 3072, 624-636.
- Milevsky, M. (2015). King William's Tontine : Why the Retirement Annuity of the Future Should Resemble Its Past. Cambridge University Press.
- Milevsky, M. A., Salisbury, T. S. (2016). Equitable retirement income tontines : Mixing cohorts without discriminating. ASTIN Bulletin 46, 571-604.

- Piggott, J., Valdez, E., Detzel, B. (2005). The simple analytics of a pooled annuity fund. Journal of Risk and Insurance 72, 497-520.
- Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., Olivieri, A. (2009). Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business. Oxford University Press.
- Sabin, M. J., Forman, J. B. (2016). The Analytics of a Single-Period Tontine. Available at SSRN : https ://ssrn.com/abstract=2874160.
- Valdez, E., Piggott, J., Wang, L. (2006). Demand and adverse selection in a pooled annuity fund. Insurance : Mathematics and Economics 39, 251-266.

# Chapitre 6

# Un mot sur la série et les auteurs...

## 6.1 Les DetraNotes

Les Detra Notes sont une série de notes techniques à la fois pédagogiques et pertinentes pour les professionnels de l'actuariat. Ces notes, rédigées dans un langage simple et accessible, sont publiées par les membres de l'équipe Detralytics, un cabinet de conseil qui fournit des services d'expertise et innovation aux entreprises nécessitant un soutien, une formation ou de la R&D en actuariat, data science et gestion des risques. L'expertise Detralytics combine connaissance du marché et recherche académique. Detralytics a été fondée dans le but de soutenir les entreprises dans l'avancement des sciences actuarielles et de répondre aux futurs défis de la profession. C'est dans le cadre de cette mission que nous rendons accessibles les Detra Notes.

## 6.2 Biographies des auteurs

### Michel Denuit

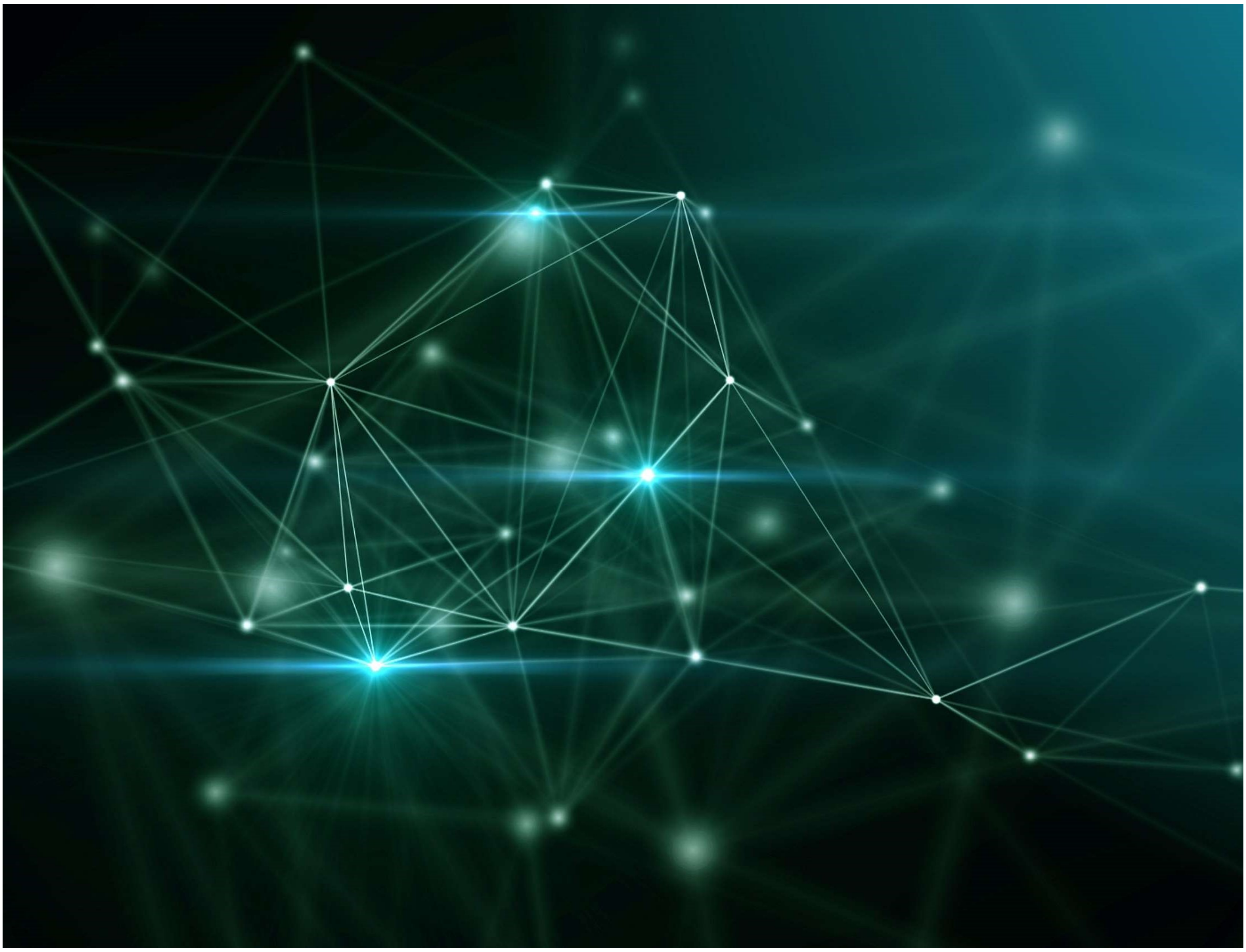
Michel Denuit est Directeur Scientifique chez Detralytics et Professeur de Sciences Actuarielles à l'Institut de Statistique, Biostatistique et Sciences Actuarielles (ISBA) de l'Université Catholique de Louvain. Michel mène une carrière académique internationale depuis une vingtaine d'années et a collaboré avec différents acteurs du marché de l'assurance sur des projets techniques. Un descriptif plus détaillé de ses activités et la liste complète de ses publications est disponible à l'adresse https ://uclouvain.be/en/directories/michel.denuit.

### Julien Trufin

Julien Trufin est Directeur Scientifique chez Detralytics et Professeur de Sciences Actuarielles au département de Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles. Julien est un actuaire qualifié de l'Institut des Actuaires en Belgique (IA|BE) et combine expérience en consultance et carrière académique, développée dans différentes universités telles que l'Université Laval (Canada), l'ULB et l'UCL. Un descriptif plus détaillé de ses activités et la liste complète de ses publications est disponible à l'adresse http ://homepages.ulb.ac.be/ jtrufin/.

## 6.3 Remerciements

Nous remercions notre excellent collègue Arthur Charpentier pour avoir attiré notre attention sur le contenu du livre de Feller. Nous remercions également Jean-Luc Ledoux pour sa lecture attentive d'une version préliminaire de ce texte, et pour nous avoir indiqué les transactions immobilières en viager des couples présidentiels français.



*info@detralytics.eu*
*Rue Belliard 2*
*1040 Brussels*
www.detralytics.com