# QUAND VILFREDO PARETO RENCONTRE JEANNE CALMENT …

*Analyse de la mortalité aux âges extrêmes en Belgique*

Par Samuel Gbari, Michel Denuit et Julien Trufin

**Disclaimer**

Le contenu des Detra Notes est à usage exclusivement pédagogique. Les applications commerciales sont à ce point spécifiques qu'on ne pourrait leur appliquer une solution qui n'aurait pas été conçue pour le cas d'espèce. Detralytics n'assume donc aucune responsabilité en cas d'utilisation commerciale du contenu du présent document. Bien évidemment, toute l'équipe se tient à votre entière disposition si les techniques présentées dans cette note devaient retenir votre intérêt.

**Résumé**

Les tables XR (pour les opérations en cas de vie) et XK (pour les opérations en cas de décès) ont désormais remplacé les anciennes tables règlementaires MR/FR et MK/FK. Le positionnement de la mortalité d'un portefeuille par rapport à ces tables est le plus souvent fiable pour les assurés relativement jeunes en raison de l'abondance des données disponibles sur cette tranche d'âges. Aux âges très avancés (au-delà de 90 ou 100 ans, disons), le problème est plus difficile à résoudre car les effectifs en portefeuille deviennent généralement très faibles.

La présente note étudie précisément la mortalité aux grands âges en Belgique. Afin de garantir un volume de données suffisant, nous considèrerons la population générale belge et nous utiliserons des techniques adaptées à l'analyse de la mortalité aux âges très avancés proposées par Gbari, Poulain, Dal et Denuit (2017).

Ceci nous amènera à proposer des tables d'expérience pour la mortalité à ces âges avancés ainsi qu'une correction de la table XR, que nous appellerons $XR^+$, afin de tenir compte de la stabilisation des quotients de mortalité mise en évidence par Rootzén et Zholud (2017) à l'aide de l'International Database on Longevity (IDL).

# Table des matières

**Table des matières** **i**

**1 Analyse de la mortalité aux grands âges en Belgique** **1**

1.1 Les données . . . . . 2

1.2 La méthodologie . . . . . 5

**2 Table XK et mortalité aux grands âges en Belgique** **8**

**3 Table XR et mortalité des 110 ans et plus** **12**

**4 Table d'expérience au-delà de 100 ans et table XR$^+$** **15**

**5 Références** **16**

**6 Un mot sur la série et les auteurs...** **17**

6.1 Les Detra Notes . . . . . 17

6.2 Biographies des auteurs . . . . . 17

6.3 Remerciements . . . . . 18

# Chapitre 1

# Analyse de la mortalité aux grands âges en Belgique

Quand on parle de longévité exceptionnelle, le nom de Jeanne Calment vient naturellement à l'esprit. Le fait que la doyenne de l'humanité a vendu son logement en viager à des investisseurs malheureux explique en grande partie la méfiance du public à l'égard de ce type de transaction (qui répond pourtant fort bien aux besoins d'une partie de la population vieillissante des pays européens, comme nous aurons l'occasion d'y revenir dans une prochaine note consacrée au financement de la fin de vie).

**Encadré 1 - Biographie de Jeanne Calment**

Jeanne Louise Calment naît le 21 février 1875. À l'âge de 21 ans, elle épouse son cousin issu de germain, Fernand Nicolas Calment, riche marchand, ce qui permet à Jeanne Calment de ne jamais travailler. Elle survécut 55 ans à son mari (mort en 1942). En 1965, à l'âge de 90 ans et sans héritier, elle vend son appartement en viager à son notaire, André-François Raffray. Le notaire alors âgé de 47 ans, accepte de lui payer mensuellement la somme de 2 500 francs. Il le fera jusqu'à sa mort en 1995, à l'âge de 77 ans ; sa femme continuera ensuite de payer, jusqu'à la mort de Jeanne Calment. Au total, les époux Raffray ont versé plus de deux fois le prix de l'appartement de Jeanne Calment conformément aux règles du viager !

## 1.1 Les données

Les données utilisées dans l'étude menée par Gbari et alii (2017) proviennent du registre national des personnes physiques en Belgique [1]. Afin de garantir leur fiabilité, elles ont été validées selon les normes les plus strictes, comme expliqué dans Poulain et alii (2001). Après exclusion de tous les cas douteux, les données consistent en une liste de 46 666 âges au décès d'individus ayant atteint 95 ans ou plus, composée d'environ 78% de femmes et 22% d'hommes.

L'étude porte ainsi sur 22 cohortes complètes [2] composées d'individus nés en Belgique entre 1886 à 1904. Les données ne sont donc pas censurées à droite et ne nécessitent par conséquent pas de traitement spécifique. La répartition des données par cohorte est donnée au Tableau 1.1.

| $t$ | Hommes | | | Femmes | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $L_{95}$ | $m$ | $95+\hat{e}_{95}$ | $L_{95}$ | $m$ | $95+\hat{e}_{95}$ |
| **1886** | 359 | 108,17 | 97,35 | 1 045 | 107,78 | 97,70 |
| **1887** | 418 | 105,13 | 97,41 | 1 130 | 110,45 | 97,64 |
| **1888** | 412 | 106,33 | 97,20 | 1 242 | 110,32 | 97,68 |
| **1889** | 462 | 105,58 | 97,53 | 1 208 | 110,16 | 97,69 |
| **1890** | 425 | 107,70 | 97,50 | 1 311 | 112,58 | 97,60 |
| **1891** | 428 | 105,81 | 97,35 | 1 368 | 109,72 | 97,70 |
| **1892** | 444 | 105,44 | 97,29 | 1 510 | 110,89 | 97,72 |
| **1893** | 492 | 110,29 | 97,46 | 1 544 | 107,75 | 97,63 |
| **1894** | 498 | 106,19 | 97,22 | 1 760 | 107,41 | 97,71 |
| **1895** | 526 | 106,62 | 97,24 | 1 852 | 109,38 | 97,86 |
| **1896** | 545 | 106,27 | 97,43 | 1 894 | 109,79 | 97,85 |
| **1897** | 568 | 106,43 | 97,33 | 2 009 | 109,85 | 97,72 |
| **1898** | 572 | 105,74 | 97,26 | 2 149 | 110,89 | 97,71 |
| **1899** | 630 | 106,88 | 97,35 | 2 301 | 111,60 | 97,72 |
| **1900** | 576 | 111,47 | 97,27 | 2 460 | 111,70 | 97,78 |
| **1901** | 635 | 103,77 | 97,23 | 2 787 | 110,36 | 97,89 |
| **1902** | 632 | 106,79 | 97,42 | 2 829 | 112,36 | 97,82 |
| **1903** | 669 | 104,71 | 97,46 | 2 980 | 109,96 | 97,81 |
| **1904** | 759 | 106,15 | 97,32 | 3 237 | 110,18 | 97,74 |

Tableau 1.1 – Nombre de survivants à 95 ans par cohorte ($L_{95}$), âge maximum au décès observé ($m$) et âge moyen au décès ($95+\hat{e}_{95}$) pour les hommes et les femmes.

Les analyses menées par Gbari et alii (2017) ont dans un premier temps permis d'établir la stabilité de la mortalité aux âges extrêmes, comme illustré à la Figure 1.1. On ne distingue en effet aucune tendance dans l'espérance de vie à 95 ans en Belgique, ni pour les hommes,

1. Le lecteur intéressé pourra consulter Poulain (2010) pour une présentation de cette base de données en lien avec l'analyse de la mortalité, notamment.
2. Une cohorte est dite complète lorsque tous les individus la composant sont décédés.

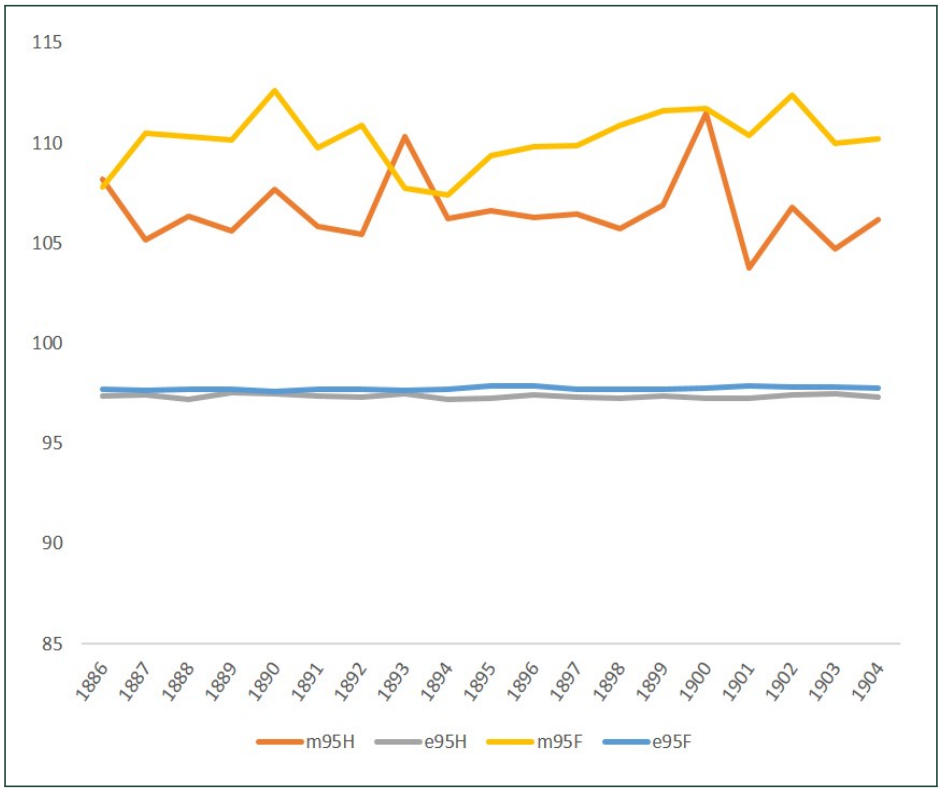



FIGURE 1.1 – Âges maximum et âges moyens aux décès après 95 ans par cohorte et par sexe.

ni pour les femmes. Cet indicateur demeure stable au fil des générations. L'étude précitée a formellement confirmé cette hypothèse à l'aide de tests statistiques d'homogénéité de type Cramér-von Mises (CvM).

Afin de savoir si une différence entre les hommes et les femmes subsiste à ces âges avancés, nous appliquons le même type de test CvM d'homogénéité. Les hypothèses d'un tel test sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : {}_tq_{95}^{\text{Homme}} = {}_tq_{95}^{\text{Femme}} \text{ pour tout } t \\ \\ H_1 : {}_tq_{95}^{\text{Homme}} \neq {}_tq_{95}^{\text{Femme}} \text{ pour au moins une valeur de } t. \end{cases}$$

L'hypothèse nulle du test légitimerait statistiquement l'approche unisexe. Les mêmes hypothèses ont également été testées pour les durées de vie restantes au-delà de 96 ans, de 97 ans, etc. Les résultats de ces tests sont consignés dans le Tableau 1.2.

Les p-valeurs obtenues sont proches de 0 jusqu'à 109 ans, ce qui permet de conclure que la distribution des âges au décès pour les hommes est statistiquement différente de celle des femmes avant 110 ans. À 110 ans, la p-valeur est plus grande que 5% mais tombe toutefois dans la zone "grise" de 5 à 10%. Le faible nombre d'observations à 110 ans pour les deux sexes suggère d'effectuer un test multinomial exact sur les données au-delà de cet âge, telles que présentées au Tableau 1.3.

Ce test a l'avantage de fournir une p-valeur exacte contrairement au test précédent. La p-

| Âge de départ $x$ | Statistique de test | p-valeur | $L_x$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | hommes | femmes |
| **95** | 56,71 | $\sim 0$ | 10 045 | 36 581 |
| **96** | 43,25 | $\sim 0$ | 6 887 | 26 711 |
| **97** | 33,14 | $\sim 0$ | 4 584 | 19 059 |
| **98** | 29,99 | $\sim 0$ | 3 001 | 13 296 |
| **99** | 11,25 | $\sim 0$ | 1 836 | 9 098 |
| **100** | 11,47 | $\sim 0$ | 1 145 | 5 995 |
| **101** | 7,33 | $\sim 0$ | 680 | 3 883 |
| **102** | 5,51 | $\sim 0$ | 373 | 2 375 |
| **103** | 5,16 | $\sim 0$ | 189 | 1 373 |
| **104** | 2,30 | $\sim 0$ | 87 | 781 |
| **105** | 2,80 | $\sim 0$ | 42 | 408 |
| **106** | 5,12 | $\sim 0$ | 19 | 221 |
| **107** | 1,59 | $\sim 0$ | 5 | 120 |
| **108** | 2,41 | $\sim 0$ | 3 | 61 |
| **109** | 2,12 | $\sim 0$ | 2 | 30 |
| **110** | 0,39 | 7,66% | 2 | 15 |

Tableau 1.2 – Résultats du test d'homogénéité de Cramér-von Mises.

| Âge $x$ | Nombre de décès, hommes | Nombre de décès, femmes |
|---|---|---|
| **110** | 1 | 10 |
| **111** | 1 | 3 |
| **112** | 0 | 2 |

Tableau 1.3 – Mortalité observée pour les hommes et pour les femmes aux âges 110 ans et plus.

valeur obtenue est de 82,87%. Ceci suggère qu'il n'y a plus de différence de mortalité entre les hommes et les femmes belges au-delà de 110 ans. Cette conclusion doit toutefois être considérée avec précaution compte tenu des effectifs très faibles. Elle correspond néanmoins aux résultats de l'étude menée au niveau international par Rootzén et Zholud (2017). Nous y reviendrons dans la suite de cette note.

## 1.2 La méthodologie

La méthodologie utilisée pour analyser la mortalité aux âges les plus avancés (ou âges extrêmes) trouve son fondement dans la théorie des valeurs extrêmes [3] dont on trouvera un résumé appliqué à l'assurance non-vie dans l'étude de cas de Cebrian, Denuit et Lambert (2003). Son application à l'assurance vie est plus récente et fait suite à l'article de Watts, Dupuis et Jones (2006). Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'étude de Gbari, Poulain, Dal et Denuit (2017) pour les détails techniques. Or, la loi de Pareto généralisée joue un rôle central dans la théorie des valeurs extrêmes. C'est donc ici que Jeanne Calment et Vilfredo Pareto (cf. Encadré 2) se rencontrent...

**Encadré 2 - Biographie de Vilfredo Pareto**

Vilfredo Pareto (1848 - 1923) est un économiste et sociologue italien. Né à Paris de mère française et de père italien, il a fait des études d'ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Turin. Économiste de renom, il est surtout connu des actuaires pour son étude de la distribution des richesses en Italie qui l'a conduit à constater que 20% de la population italienne détenait 80% des richesses nationales. Cette loi des "80-20", 20% des causes produisent 80% des effets, a donné naissance à la célèbre loi de Pareto qui est rapidement devenue un outil incontournable de la modélisation du coût des sinistres en assurances dommages où l'on constate empiriquement que la majeure partie du coût total des sinistres correspond à une minorité de sinistres les plus graves.

Gbari et alii (2017) ont montré qu'au delà d'un certain seuil préalablement fixé $x^\star$, la distribution de la durée de vie restante peut être bien approximée par une loi de Pareto Généralisée (ou GPD, pour Generalized Pareto Distribution, cf. Encadré 3). Les seuils de 98,89

3. Même si le recours à ces modèles pour traiter des problèmes d'assurance vie peut étonner, la théorie des valeurs extrêmes tire ses racines, d'un point de vue historique, dans la modélisation des durées de vie restantes. Voyez par exemple Balkema et de Haan (1974). Très tôt, cette approche a été employée pour détecter un éventuel âge ultime qui ne pourrait être dépassé, notamment par Aarssen et de Haan (1994).

pour les hommes et de 100,89 pour les femmes ont été rigoureusement déterminés sur base de plusieurs méthodes de sélection automatique afin d'en garantir la robustesse. Les paramètres estimés par la méthode du maximum de vraisemblance sont présentés au Tableau 1.4.

**Encadré 3 - Loi de Pareto Généralisée (GPD)**

La loi de probabilité GPD dépend de deux paramètres : l'indice de queue $\xi$ et le paramètre d'échelle $\beta$. Sa fonction de répartition est donnée par :

$$G(s) = \begin{cases} 1-(1+\frac{\xi}{\beta}s)_+^{-1/\xi} \text{ si } \xi \neq 0, \\ \\ 1-\exp(-s) \text{ si } \xi = 0. \end{cases}$$

En particulier, la GPD coïncide avec :

- la loi de Pareto si $\xi > 0$
- la loi de Pareto de type II si $\xi < 0$
- la loi exponentielle si $\xi = 0$.

Le support est $\mathbb{R}^+$ lorsque $\xi \geq 0$ et se réduit à l'intervalle $[0; -\beta/\xi]$ lorsque $\xi < 0$. Dans ce cas, les valeurs possibles pour la loi de GPD sont bornées supérieurement, d'où la possibilité d'estimer un âge maximum au décès donné par

$$\omega = x^\star - \frac{\beta}{\xi}.$$

| **Paramètres** | **hommes** | **femmes** |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{x^\star}$ | 98,89 | 100,89 |
| $\boldsymbol{L_{x^\star}}$ | 1 940 | 4 104 |
| $\widehat{\xi}^{ML}$ | -0,132 | -0,092 |
| s.e ($\widehat{\xi}^{ML}$) | 0,015 | 0,014 |
| $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{ML}$ | 2,098 | 2,019 |
| s.e ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{ML}$) | 0,057 | 0,042 |
| **p-valeur KS** | 82,8% | 95,1% |

Tableau 1.4 – Résultats d'estimation de la loi GPD et du test Kolmogorov-Smirnov (KS) d'adéquation.

L'indice de queue étant négatif tant pour les hommes que pour les femmes, il existerait donc une limite supérieure à la durée de vie en Belgique (cf. Encadré 3). Cette limite est estimée à 114,82 ans pour les hommes et 122,73 pour les femmes. Certaines études récentes, comme Dong (2016) et Hanayama et Sibuya (2015) par exemple, concluent également à l'existence d'une limite naturelle à la durée de vie humaine tournant autour de 115 ans avec occasionnellement des dépassements comme Jeanne Calment. Ce type de résultat est cependant controversé car dépendant des données utilisées, comme le démontrent Rootzén

et Zholud (2017). Nous nous garderons bien de trancher cette question. D'un point de vue actuariel, ces âges 114,82 et 122,73 doivent plutôt être considérés pragmatiquement comme des bornes supérieures à utiliser dans les calculs des primes et des réserves.

# Chapitre 2

# Table XK et mortalité aux grands âges en Belgique

La Figure 2.1 montre que les quotients de mortalité issus de la table XK majorent les quotients bruts $\widehat{q}_x$ obtenus sur base de la mortalité observée en Belgique (dorénavant désignés par Brut-H et Brut-F). La table règlementaire incorpore donc bien un chargement de sécurité pour les opérations de type décès, y compris aux âges avancés. Bien entendu, des couvertures classiques en cas de décès sont rarement commercialisées à ces âges en Belgique (où il n'y a pas de marché pour les assurances vie entière) et seules subsistent les assurances obsèques.

Il est important de souligner que la table XK présente des irrégularités notamment aux alentours de 105 ans. Cela provient des arrondis opérés sur les effectifs de survivants dans le tableau publié au journal officiel. En outre, la table XK s'arrête à 106 ans, les effectifs de survivants étant nuls au-delà de cet âge dans le tableau en question.

Passons à présent à une approximation GPD semblable à celle mise en oeuvre par Gbari et alii (2017). En se basant sur la propriété de stabilité de la loi GPD (cf. Encadré 4), ces seuils ont été ramenés à 99 pour les hommes et 101 pour les femmes (donc aux seuils de l'étude précitée, arrondis vers le haut). Les estimations des paramètres [1] sont présentées au Tableau 2.1.

**Encadré 4 - Propriété de stabilité de la loi GPD**

Soit une variable aléatoire $X$ suivant la loi GPD de paramètres $\xi$ et $\beta$. La propriété de stabilité de la loi GPD stipule que toute variable aléatoire $X-u|X>u$ représentant l'excès au-delà d'un niveau $u>0$ donné, sachant que ce niveau a été atteint, suit également une loi GPD de paramètres $\xi$ et $\beta+\xi u$. L'indice de queue demeure donc inchangé.

1. Les résultats ont été obtenus à l'aide du logiciel `R` au moyen de la fonction `fitgpd` du package `POT`.

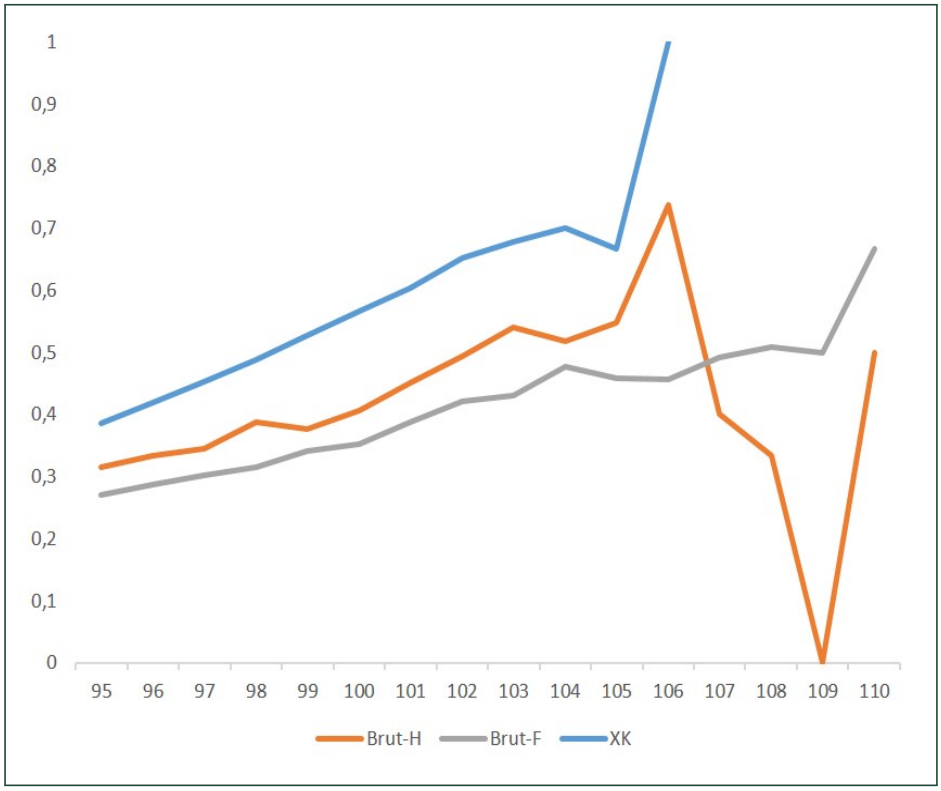



FIGURE 2.1 – Quotients de mortalité issus de la table règlementaire XK et quotients bruts $\widehat{q}_x$ obtenus sur base de la mortalité observée en Belgique (Brut-H et Brut-F).

| **Paramètres** | **hommes** | **femmes** |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{x^\star}$ | 99 | 101 |
| $\boldsymbol{L_{x^\star}}$ | 680 | 3 883 |
| $\widehat{\xi}$ | -0,13 | -0,09 |
| se($\widehat{\xi}$) | 0,02 | 0,01 |
| $\xi^-$ | -0,16 | -0,12 |
| $\xi^+$ | -0,1 | -0,07 |
| $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ | 2,09 | 2,01 |
| se($\widehat{\boldsymbol{\beta}}$) | 0,06 | 0,04 |
| $\boldsymbol{\beta}^-$ | 1,98 | 1,93 |
| $\boldsymbol{\beta}^+$ | 2,2 | 2,1 |
| $\frac{-\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}}$ | 15,71 | 21,57 |
| $\widehat{\boldsymbol{\omega}}$ | 114,71 | 122,57 |

Tableau 2.1 – Résultats d'estimation de la loi GPD pour $x^\star = 99$ (resp. $x^\star = 101$) chez les hommes (resp. les femmes).

L'indice de queue estimé est négatif tant pour les hommes que pour les femmes, ainsi que les bornes supérieures $\xi^+$ des intervalles de confiance à 95%. L'âge théorique maximum obtenu est alors de 114,74 pour les hommes et 122,57 pour les femmes.

Si on ramène le seuil des hommes à 101 pour coïncider avec celui des femmes, il suffit d'adapter le paramètre $\beta$ en vertu de la propriété de stabilité de la loi GPD rappelée dans l'Encadré 4. Cela évite de devoir réestimer les paramètres sur un ensemble d'observations ayant diminué de manière drastique (1 836 observations pour les hommes de 99 ans contre 680 pour les hommes de 101 ans). Les résultats obtenus sont repris au Tableau 2.2. Ceux-ci demeurent inchangés, excepté le paramètre d'échelle et son écart-type qui ont été réajustés.

| **Paramètres** | **hommes** | **femmes** |
|---|---|---|
| $x^\star$ | 101 | 101 |
| $\widehat{\xi}$ | -0,13 | -0,09 |
| s.e $(\widehat{\xi})$ | 0,02 | 0,01 |
| $\xi^+$ | -0,1 | -0,07 |
| $\widehat{\beta}$ | 1,82 | 2,01 |
| se $(\widehat{\beta})$ | 0,04 | 0,04 |
| $\frac{-\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}}$ | 13,71 | 21,57 |

Tableau 2.2 – Résultats d'estimation de la loi GPD pour le seuil unique $x^\star = 101$ pour les hommes et les femmes.

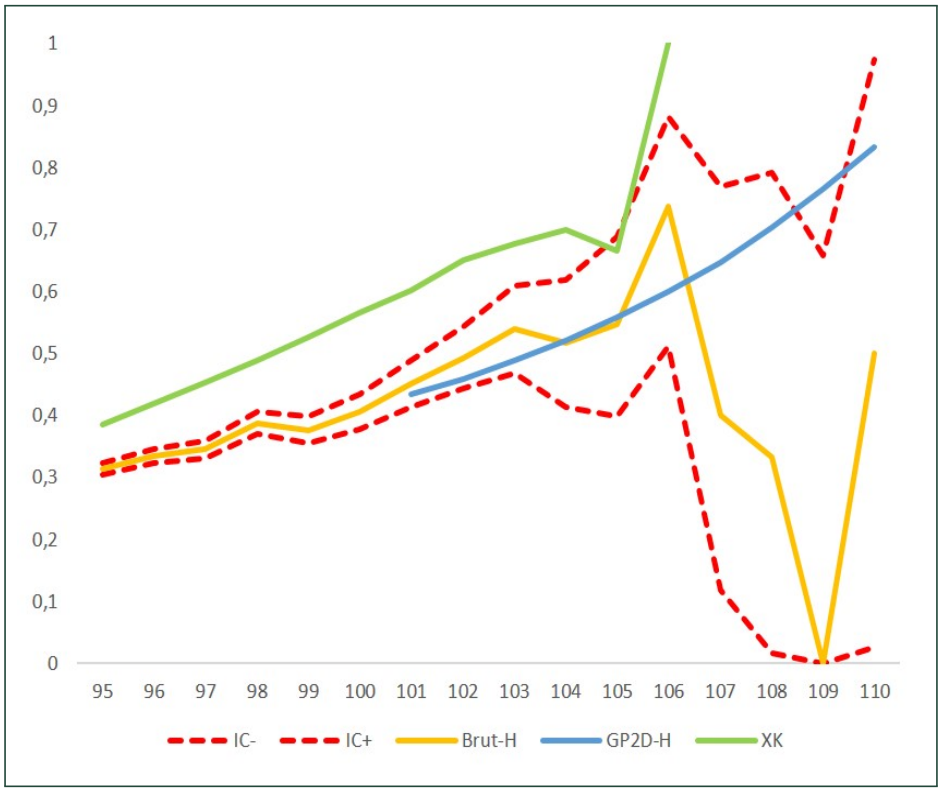
Il est alors possible de construire des tables de mortalité obtenues sur base de l'approximation GPD. Il s'agit des tables GP2D-H [2] pour les hommes et GP2D-F pour les femmes. Celles-ci sont représentées aux Graphiques 2.2a et 2.2b en présence des intervalles de confiance binomiaux exacts à 95% et des benchmarks Brut-H et Brut-F. Les tables GP2D-H et GP2D-F sont bien contenues dans ces intervalles de confiance.

Afin d'évaluer le chargement de sécurité incorporé par l'utilisation de la table XK, la prime pure d'une assurance vie entière individuelle à 101 ans a été calculée au taux technique de 1%. Les résultats sont présentés au Tableau 2.3. On ne constate que de très légères variations dans le montant de ces primes.

| **Tables** | **Prime pure Vie Entière** |
|---|---|
| **XK** | 0,976 |
| **Brut-H** | 0,972 |
| **Brut-F** | 0,968 |
| **GP2D-H** | 0,979 |
| **GP2D-F** | 0,976 |

Tableau 2.3 – Prime pure d'une vie entière à 101 ans avec un taux technique de 1%.

2. **GP2D** fait référence à **G**bari **P**oulain **D**al **D**enuit.




(a) Tables XK, GP2D-H, Brut-H et intervalle de confiance binomial exact à 95% associé.

(b) Tables XK, GP2D-F, Brut-F et intervalle de confiance binomial exact à 95% associé.

FIGURE 2.2 – Quotients de mortalité issus des différentes tables chez les hommes (haut) et chez les femmes (bas).

# Chapitre 3

# Table XR et mortalité des 110 ans et plus

La Figure 3.1 illustre le positionnement de la table réglementaire XR par rapport aux quotients Brut-H et Brut-F. La table XR apparaît prudente pour les opérations en cas de vie jusqu'à l'âge de 106 ans. Par contre, au-delà de cet âge, le graphique suggère que la table XR ne l'est plus. Par ailleurs, les effectifs de survivants deviennent très petits en bout de table. Ainsi, les quotients bruts de mortalité correspondants deviennent très volatils et moins précis comme indiqué par les intervalles de confiance qui s'élargissent (cf. Figures 2.2a et 2.2b). L'idée est alors de construire une table unisexe prudente [1], notée $XR^+$. Les résultats obtenus dans la Section 1.1 suggéraient que la distribution des âges au décès des hommes était identique à celle des femmes aux âges très avancés. Rootzén et Zholud (2017) ont récemment établi sur base des données issues de la International Database on Longevity (IDL) contenant les âges au décès de 668 supercentenaires (c'est-à-dire des individus ayant atteint l'âge de 110 ans) de 15 pays qu'il n'y avait plus aucune différence de mortalité

- ni entre les sexes,
- ni entre les âges,
- ni entre pays

au-delà de 110 ans. Au-delà de cet âge, les individus seraient donc soumis à des quotients annuels de mortalité constamment égaux à 0,47.

Ceci nous amène à adapter progressivement la table XR aux grands âges (à partir de 95 ans) afin de la faire coller aux quotients de mortalité bruts unisexes (désignés Brut-U [2]) de 106 à 109 ans pour finalement atteindre la valeur limite de Rootzén et Zholud (2017) à 110 ans. Cette adaptation s'opère à l'aide de la méthode proposée par Denuit et Goderniaux (2005), tel qu'expliqué à l'Encadré 5.

1. L'appellation choisie, $XR^+$, rappelle la variante FK' de la table FK qui avait été proposée pour des raisons similaires.

2. Cette table est obtenue sur base de la fusion des données individuelles ayant servi à bâtir les Tables Brut-H et Brut-F sans distinction de sexe.

FIGURE 3.1 – Quotients de mortalité issus de la table règlementaire XR et benchmarks Brut-H et Brut-F.

## Encadré 5 - Construction de la table XR$^+$

La méthode de fermeture des tables de mortalité proposée par Denuit et Goderniaux (2005) impose une forme quadratique au logarithme des quotients de mortalité et une tangente horizontale en bout de table. Mathématiquement, cela se traduit par les contraintes suivantes :

$$\ln(q_x) = a + bx + cx^2 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial \ln(q_x)}{\partial x}\right|_{x=110} = 0.$$

Nous imposons ici d'atteindre la valeur limite de Rootzén et Zholud (2017) à 110 ans. Ces contraintes reviennent à optimiser le paramètre $c$ de l'équation

$$\ln(q_x) - \ln(0.47) = c(110^2 - 220x + x^2).$$

Le paramètre $c$ est obtenu par moindres carrés. Il est approximativement donné par $c \approx -0,0004$. Le positionnement final de la table XR$^+$ par rapport aux benchmarks Brut-H et Brut-F est présenté à la Figure 3.2.

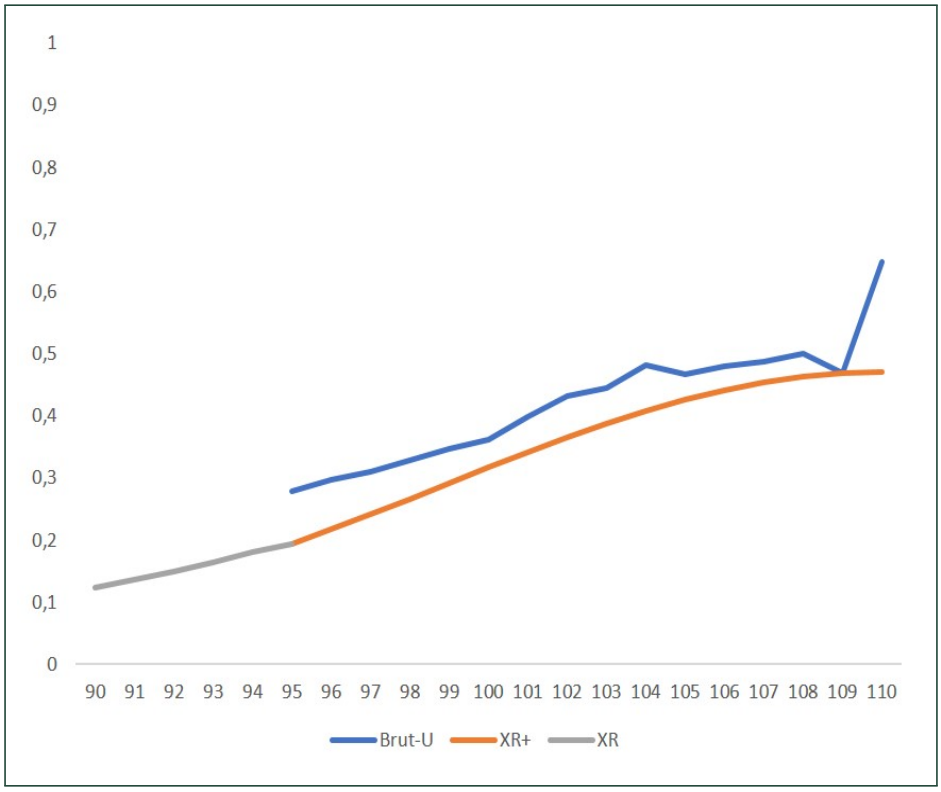



FIGURE 3.2 – Table $XR^+$ et benchmark Brut-U.

# Chapitre 4

# Table d'expérience au-delà de 100 ans et table XR$^+$

Cette note a permis de positionner la mortalité aux âges avancés par rapport à celle des tables règlementaires XR et XK. La table règlementaire XK s'avère globalement prudente pour les opérations en cas de décès. La table XR ne semble cependant plus assez prudente aux âges avancés. Aussi, une table XR$^+$ a été rigoureusement construite fournissant aux assureurs un outil de pilotage adéquat de leur portefeuille aux âges très avancés.

Le Tableau 4.1 reprend les différents résultats concernant la mortalité aux grands âges étudiés dans cette note technique.

| x | XR | XK | Brut-H | Brut-F | Brut-U | GP2D-H | GP2D-F | XR$^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **95** | 0,198 | 0,386 | 0,314 | 0,270 | 0,279 | | | 0,194 |
| **96** | 0,217 | 0,418 | 0,334 | 0,286 | 0,296 | | | 0,217 |
| **97** | 0,237 | 0,453 | 0,345 | 0,302 | 0,311 | | | 0,241 |
| **98** | 0,259 | 0,489 | 0,388 | 0,316 | 0,329 | | | 0,266 |
| **99** | 0,283 | 0,527 | 0,376 | 0,341 | 0,347 | | | 0,292 |
| **100** | 0,309 | 0,567 | 0,406 | 0,352 | 0,361 | | | 0,317 |
| **101** | 0,337 | 0,603 | 0,451 | 0,388 | 0,398 | 0,434 | 0,395 | 0,342 |
| **102** | 0,367 | 0,652 | 0,493 | 0,422 | 0,432 | 0,460 | 0,413 | 0,365 |
| **103** | 0,398 | 0,677 | 0,540 | 0,431 | 0,444 | 0,489 | 0,431 | 0,387 |
| **104** | 0,431 | 0,700 | 0,517 | 0,478 | 0,482 | 0,521 | 0,452 | 0,408 |
| **105** | 0,466 | 0,667 | 0,548 | 0,458 | 0,467 | 0,558 | 0,475 | 0,426 |
| **106** | 0,502 | 1,000 | 0,737 | 0,457 | 0,479 | 0,600 | 0,499 | 0,441 |
| **107** | 0,541 | | 0,400 | 0,492 | 0,488 | 0,648 | 0,527 | 0,454 |
| **108** | 0,578 | | 0,333 | 0,508 | 0,500 | 0,703 | 0,557 | 0,463 |
| **109** | 0,619 | | 0,000 | 0,500 | 0,469 | 0,765 | 0,590 | 0,468 |
| **110** | 0,656 | | 0,500 | 0,667 | 0,647 | 0,834 | 0,628 | 0,470 |

Tableau 4.1 – Récapitulatif des probabilités de décès $q_x$ des différentes tables.

# Chapitre 5

# Références


- Aarssen, K., de Haan, L. (1994). On the maximal life span of humans. Mathematical Population Studies 4, 259-281.
- Balkema, A., de Haan, L. (1974). Residual life time at great age. Annals of Probability 2, 792-804.
- Cebrian, A., Denuit, M., Lambert, Ph. (2003). Generalized Pareto fit to the Society of Actuaries' large claims database. North American Actuarial Journal 7, 18-36.
- Denuit, M., Goderniaux, A-C. (2005). Closing and projecting life tables using log-linear models. Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires 2005.1, 29-49.
- Dong, X., Milholland, B., Vijg, J. (2016). Evidence for a limit to human lifespan. Nature 538, 257-259.
- Gbari, S., Poulain, M. Dal, L., Denuit, M. (2017). Extreme value analysis of mortality at the oldest ages : A case study based on individual ages at death. North American Actuarial Journal 21, 397-416.
- Hanayama, N., Sibuya, M. (2015). Estimating the upper limit of lifetime probability distribution, based on data of Japanese centenarians. The Journal of Gerontology : Biological Sciences, 1-8.
- Poulain M. (2010). Le registre de population belge. In "Histoire de la population de la Belgique et de ses territoires", pp. 83 - 116.
- Poulain, M., Chambre, D., Foulon (2001). Survival among Belgian centenarians (1870-1894 cohorts). Population 13, 117-138.
- Rootzén, H., Zholud, D. (2017). Human life is unlimited-but short. arXiv preprint arXiv :1708.02184.
- Watts K., Dupuis D. and Jones B. (2006). An extreme value analysis of advance age mortality data. North American Actuarial Journal 10, 162-178.

# Chapitre 6

# Un mot sur la série et les auteurs...

## 6.1 Les Detra Notes

Les Detra Notes sont une série de notes techniques à la fois pédagogiques et pertinentes pour les professionnels de l'actuariat. Ces notes, rédigées dans un langage simple et accessible, sont publiées par les membres de l'équipe Detralytics, un cabinet de conseil qui fournit des services d'expertise et innovation aux entreprises nécessitant un soutien, une formation ou de la R&D en actuariat, data science et gestion des risques. L'expertise Detralytics combine connaissance du marché et recherche académique. Detralytics a été fondée dans le but de soutenir les entreprises dans l'avancement des sciences actuarielles et de répondre aux futurs défis de la profession. C'est dans le cadre de cette mission que nous rendons accessibles les Detra Notes.

## 6.2 Biographies des auteurs

### Samuel Gbari

Samuel Gbari est consultant pour Detralytics. Samuel est Docteur en Sciences Actuarielles et actuaire qualifié de l'Institut des Actuaires en Belgique (IA|BE). Samuel est actif dans la consultance depuis 2013. Il a travaillé sur une grande variété de missions pour des assureurs à la fois en vie et non-vie. Il est le co-auteur de divers articles métier dont *Extreme value analysis of mortality at the oldest ages : A Case Study Based on Individual Ages at Death* paru en 2017 dans le North American Actuarial Journal Volume 21 - Issue 3.

## Michel Denuit

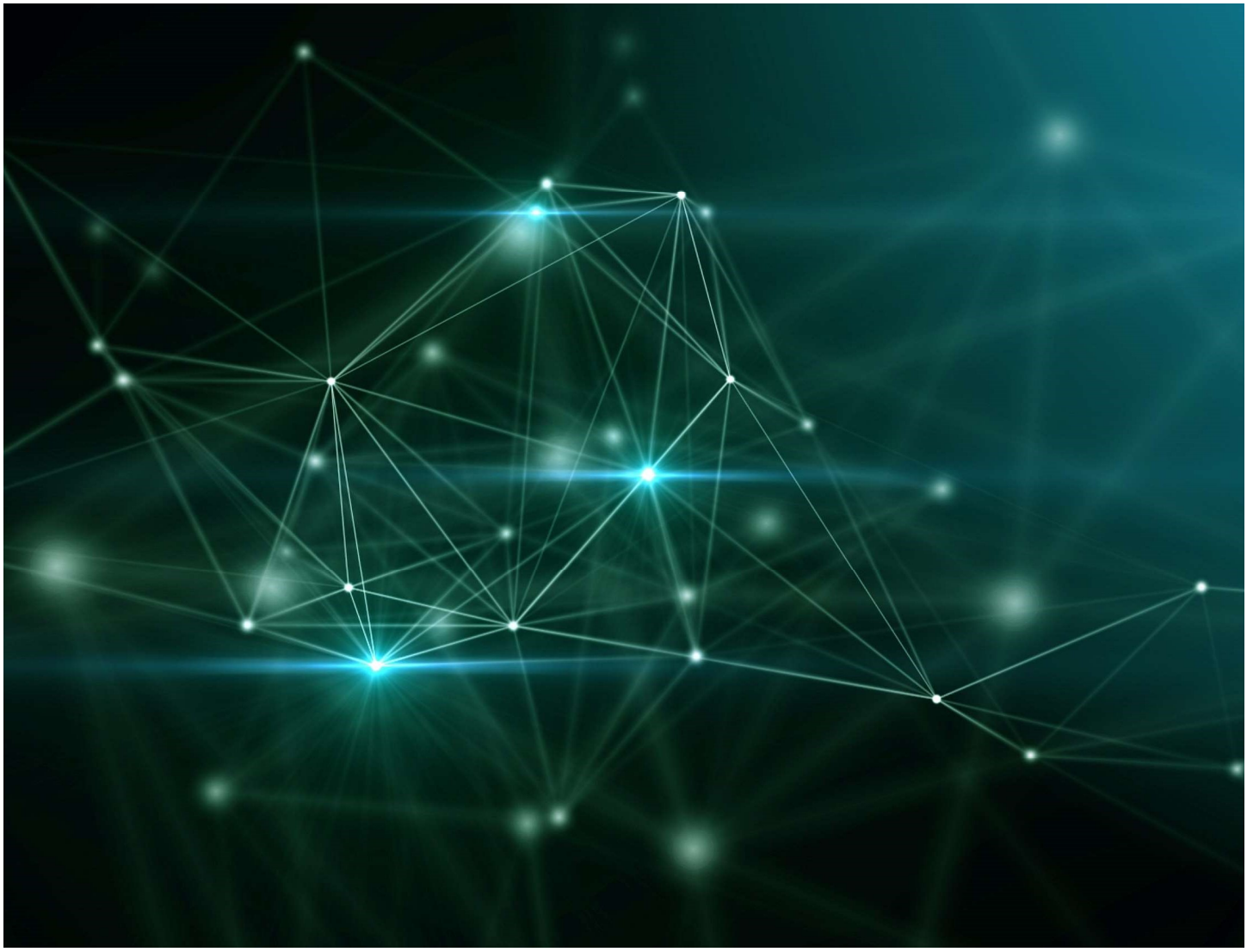
Michel Denuit est Directeur Scientifique chez Detralytics et Professeur de Sciences Actuarielles à l'Université Catholique de Louvain. Michel mène une carrière académique internationale depuis une vingtaine d'années et a collaboré avec différents acteurs du marché de l'actuariat sur des projets techniques. Il a écrit et co-écrit divers ouvrages et publications métier en lien avec le sujet dont *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business* et *A multivariate evolutionary credibility model for mortality improvement rates* paru en 2016 dans Insurance : Mathematics and Economics. Une liste complète de ces publications est disponible à cette adresse : `https://uclouvain.be/en/directories/michel.denuit`.

## Julien Trufin

Julien Trufin est Directeur Scientifique chez Detralytics et Professeur de Sciences Actuarielles au département de Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles. Julien est un actuaire qualifié de l'Institut des Actuaires en Belgique (IA|BE) et combine expérience en consultance et carrière académique, développée dans différentes universités telles que l'Université Laval (Canada), l'ULB et l'UCL. Il a écrit et co-écrit diverses publications métier dont *From regulatory life tables to stochastic mortality projections: the exponential decline model* et *Model points and Tail-VaR in life insurance* parus dans Insurance : Mathematics and Economics. Une liste complète de ces publications est disponible à cette adresse : `http://homepages.ulb.ac.be/~jtrufin/`.

## 6.3 Remerciements

Les auteurs remercient Michel Poulain et Luc Dal pour leur franche collaboration et leur expertise pour la fiabilisation des données. Ils remercient également les participants au colloque *Living To 100* organisé par la Society Of Actuaries (SOA) pour les remarques constructives qui ont permis d'améliorer substantiellement la présente note.



Detralytics

*info@detralytics.eu*
*Rue Belliard 2*
*1040 Brussels*
www.detralytics.com